CONCOURS UNIQUE D'ENTRÉE DANS LES GRANDES ÉCOLES MILITAIRES ÉTRANGÈRES

Session : 2025

Durée : 04H

Niveau BAC S

Coef : 6

EPREUVE 1 DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entré unique par claviers sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou de tracer de courbe sont interdites

Leur utilisation sera considérée comme une fraude (CF Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 : 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^{x}$.

1) Etudier les variations de g. **0,5 pt**

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique αet que$1{,}14 < \alpha < 1{,}15$. **0,75 pt**

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\epsilon[0;+\infty[$. **0,25 pt**

Partie B :

1) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x\epsilon[0;+\infty[$,

   $f'(x) = \frac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^2}$. **0,75 pt**

2) En déduire le sens de variations de f. **0,5 pt**

3) Dresser le tableau de variations de f. **0,5 pt**

4) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$, puis donner un encadrement de $f(\alpha)$. **0,5 pt**

5) a) Etablir que $\forall x\epsilon[0;+\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^{x}+1}$ avec

   $\varphi(x) = e^{x} - xe^{x} - 1$. **0,5 pt**

   b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T au point O. **0,5 pt**

   c) Tracer C_f. **0,75 pt**

6) Calculer en cm² l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C_f, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. **0,5 pt**

EXERCICE 2 : 4 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $-5+6i, -7-2i$ et $3-2i$. On admet que le point F d'affixe $-2+i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1) Soit H le point d'affixe -5.

   Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S de centre A transformant C en H. **1 pt**

2) a) Etant donnés des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes et g la transformation d'écriture complexe : $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.

   Déterminer$a$ et b pour que les points A et C soient invariants par g. **0,5 pt**

   b) Déterminer l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite

   (AC). **0,5 pt**

   c) Vérifier que E appartient à Γ. **0,5 pt**

3) Soit I le milieu de $[AC]$.

   a) Déterminer l'affixe du point G, image de I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. **1pt**

   b) Démontrer que les points H, G et F sont alignés. **0,5 pt**

EXERCICE 3 : 4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que ;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon. **0,5 pt**

2) Soit (D) la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D). **0,5 pt**

   b) Montrer que l'intersection de (S) et (D) est vide. **0,5 pt**

3) Soit B le point de coordonnées $(3,0,0)$.

a) Justifier que le point B et la droite (D) déterminent un plan P. **0,5 pt**

b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$. **0,5 pt**

c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact. **1,5 pt**

EXERCICE 4 : 6 points

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que F est impaire. **0,5 pt**

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$. **0,5 pt**

a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$. **0,5 pt**

b) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis calculer $F'(x)$. **0,75 pt**

c) En déduire le sens de variations de F. **0,5 pt**

3. a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$\forall x > 0$ il existe $c \in]x; 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{ln(1+c^2)}$. **0,5 pt**

b) En déduire que $\forall x > 0$, $\frac{x}{ln(1+4x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x}{ln(1+x^2)}$. **0,5 pt**

c) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$ et

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{F(x)}{x}$. **0,75 pt**

d) Vérifier que : $0,64 < F(\sqrt{2}) < 1,29$. **0,5 pt**

e) Tracer la courbe de F dans le plan muni d'un repère. On prendra $F(\sqrt{2}) = 1$. **1pt**