CONCOURS UNIQUE D'ENTRÉE DANS LES GRANDES ÉCOLES MILITAIRES ÉTRANGÈRES

Session : 2025

Durée : 04 heures

Niveau BAC S

Coef : 6

EPREUVE 2 DE MATHÉMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entré unique par claviers sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou de tracer de courbe sont interdites

Leur utilisation sera considérée comme une fraude (CF Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 : 5 points

Pour chaque item, une seule des propositions est exacte. Donner en justifiant la bonne réponse. Une réponse correcte et bien justifiée rapporte **1,25 pt**

1) Un boutiquier propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende un produit est égale à 0,2.

   Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

   a) 0,4 b) 0,04 c) 0,1024 d) 0,2048.

2) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

   a) 0,043 b) 0,275 c) 0,217 d) 0,033.

3) Dans la même classe, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

   a) 0,100 b) 0,091 c) 0,111 d) 0,25.

4) Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 cm. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

   a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{9}{14}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2: 5 points

Soit a un nombre complexe différent de 1. On considère l'équation (E) :

$$2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0.$$

1) Montrer que les deux solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et

   $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$. **1 pt**

2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a) Montrer que $a-1=2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$. **0,5 pt**

b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et de z_2. **1 pt**

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On admet que $Re(a)<0$, et on considère les points $A(a), B(-i), C(i)$ et $B^{'}(1)$.

a) Déterminer en fonction de a, les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. **0,5 pt**

b) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note $C^{'}=r_1(C)$ et $A^{'}=r_2(A)$ et soient c' et a' les affixes respectives de C' et $A^{'}$.

Montrer que : $a^{'}=z_1$ et $c^{'}=z_2$. **1 pt**

c) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A^{'}B^{'}C^{'}$. **1 pt**

EXERCICE 3 : 10 points

Partie A :

Soit$n$ un entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle $(E_n): y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1) Soit h et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout$x$ réel, $g(x)=h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel : $h^{'}(x)=\frac{x^n}{n!}$. **1 pt**

b) En déduire la fonction $h$associée à une solution $g$de(E_n) , sachant que $h(0)=0$. **0,5 pt**

c) Quelle est alors la fonction g ? **0,5 pt**

2) Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si, $\phi-g$est solution de l'équation :

$(F): y'+y=0$. **0,5 pt**

b) Déterminer la solution générale ϕde l'équation(E_n). **0,5 pt**

c) Déterminer la solution $f$de l'équation (E_n) vérifiant $f(0)=0$. **0,5 pt**

Partie B :

Le but de cette partie est de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right) = e.$

1) On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

   a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$. **0,5 pt**

   b) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. En utilisant la **partie A**, montrer que pour tout x réel et pour tout entier naturel n non nul, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$. **1 pt**

2) Soit n un entier naturel ,on considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ de terme général $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

   a) Calculer I_0. **0,5 pt**

   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$. **1 pt**

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!}e^{-1}$. **0,5 pt**

   d) En déduire que la suite (I_n) est convergente. **0,25 pt**

3) On considère la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_n = \frac{1}{n!}$.

   a) Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ puis en déduire le sens de variation de $(V_n)_{n\geq 0}$. **0,75 pt**

   b) Montrer que $\forall n \geq 1, V_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n$. **0,5 pt**

   c) En déduire que $\forall n \geq 1, 0 \leq V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_1$. **0,5 pt**

4) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = e.$ **1 pt**