Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Faculté des Sciences et Techniques — Licence 3

Département de Mathématiques — 2020 - 2021

Épreuves de Mathématiques

Durée : 3H

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = Im\,(f - \alpha Id_E) + Im\,(f - \beta Id_E)$.

On suppose de plus que $(f - \alpha Id_E)\, o\, (f - \beta Id_E) = 0$.

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.

3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.

4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta Id_E)$.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.

2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.

3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.

4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Seconde partie :

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

2. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

3. Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

4. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.

5. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

Exercice 3

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (U_n) définie par $U_1 = a$, et pour tout $n > 0$,

$$U_{n+1} = \frac{n + U_n}{n+1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < 1$.

2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{n+1}$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$$

5. Déduire la limite de (U_n).